I SEGRETI DEL FOGLIO A4

Quando pensiamo al foglio di carta su cui stampiamo usualmente i nostri documenti (formato A4), non sempre ci rendiamo conto della sua sapiente proporzione dimensionale.
Proviamo a riflettere su un caso concreto: dovete distribuire alcuni volantini a scuola e il Preside ha raccomandato di risparmiare il più possibile i materiali necessari (carta e toner); decidete quindi di stampare due pagine per foglio: in questo modo riuscite a utilizzare ogni centimetro quadrato di spazio ottenendo due copie perfettamente proporzionate del volantino.
Se vi chiedessi di quanto si è rimpicciolito il carattere stampando due pagine per foglio, cosa rispondereste? Probabilmente direste: “Le dimensioni dei caratteri stampati si sono dimezzate”. E se ancora vi chiedessi quanta carta e quanto toner si risparmiano in questo modo, probabilmente rispondereste: “Metà carta e metà toner”. La seconda risposta è corretta, ma la prima è sbagliata: scopriremo ora le relazione matematiche che giustificano tutto questo.

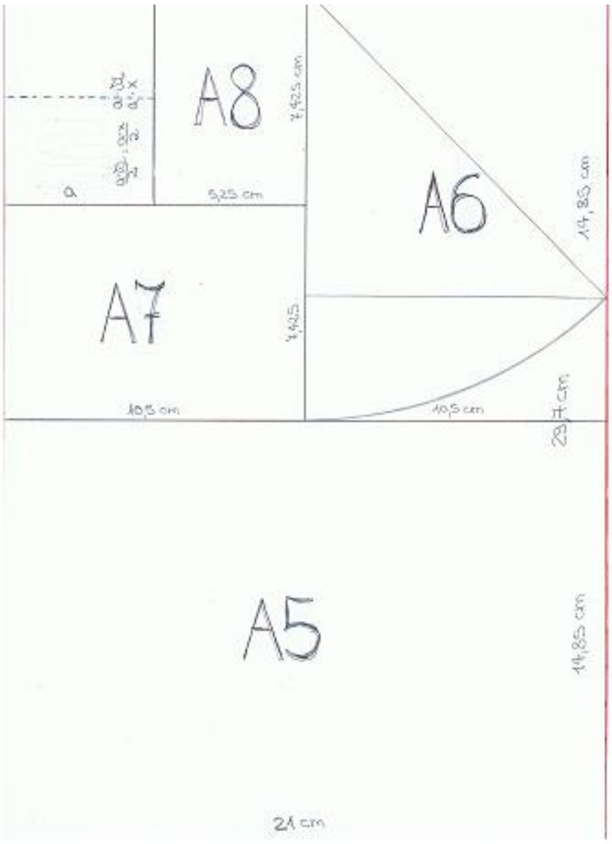
***** La prima risposta è sbagliata perché non avete tenuto in considerazione l’**orientamento del foglio**:
A4 <u>verticale</u>: 1 pagina di larghezza 21 cm e lunghezza 29,7 cm;
se decidiamo di stampare 2 pagine per foglio, stampiamo in orizzontale utilizzando tutta la carta:
A4 <u>orizzontale</u>: 2 pagine di larghezza 14,85 cm e lunghezza 21 cm (circa 5/7 della lunghezza e 7/10 della larghezza, che sono frazioni praticamente equivalenti, ovvero 50/70 e 49/70, quindi le proporzioni sono rispettate)

* Considerando ciò che è stato detto al punto precedente, le dimensioni dei caratteri non sono esattamente le metà perché **è la superficie che si dimezza, non le misure lineari** (… didattica dei punti di vista!). Tenete in considerazione che, **se dimezzassimo entrambe le dimensioni, l’area diventerebbe ¼**; ricordate la similitudine: mentre il rapporto tra tutte le misure lineari corrispondenti (lati, altezze, diagonali, perimetri) è quello di similitudine, il rapporto tra le aree è il quadrato del rapporto di similitudine!
Quindi da dove deriva il risparmio di metà carta e metà toner? Per la carta non è necessario fare ulteriori considerazioni (2 pagine per foglio → metà carta), per il toner utilizziamo un esempio concreto: immaginiamo di aver disegnato nel foglio A4 verticale un rettangolo di base 7 cm e altezza 10 cm esattamente al centro del foglio (occupa 1/3 della lunghezza e 1/3 della larghezza); l’area del rettangolo è 7x10 = **70 cm^2** ; adesso decidiamo di stampare due fogli per pagina (in orizzontale): le dimensioni del nostro rettangolo saranno ancora 1/3 della lunghezza e 1/3 della larghezza, cioè 5cm e 7cm, e l’area del nostro rettangolo diventerà 5x7 = **35 cm^2**, quindi **stampando due pagine per foglio risparmio esattamente metà toner.**
Per le riduzioni successive vale lo stesso discorso: se stampo 4 fogli per pagina (in verticale), le dimensioni diventano la metà (3,5cm e 5cm) e quindi l’area è ¼ (17,5 cm^2); se stampo 8 fogli (in orizzontale) le dimensioni del rettangolo diventano 2,5 e 3,5 e l’area è 1/8 di quella di partenza (8,75 cm^2)…
Dobbiamo concludere che c’è una proporzione speciale tra le dimensioni del foglio A4… Quale?

Non si tratta di un **rettangolo aureo** (il rapporto tra la dimensione maggiore e quella minore dovrebbe essere uguale al rapporto tra la dimensione minore e la differenza tra le dimensioni): **29,7: 21** $\neq$ 21: 8,7 e nessuno di essi coincide con φ (1,618); se osserviamo bene il primo rapporto, però, ci accorgiamo che è un numero familiare **… 1,414 … radice quadrata di 2**!

Ecco il segreto: per ottenere un foglio che possa essere utilizzato in verticale con 1 pagina e in orizzontale con 2 pagine perfettamente proporzionate alla prima e che occupino l'intera superficie disponibile, basta moltiplicare la dimensione minore per 1,414.

Osservate l'immagine seguente, che illustra la sequenza dei formati da A4 ad A8:



<u>Per i ragazzi di terza</u> la dimostrazione del perché la costante vale $\sqrt{2}$ è possibile utilizzando il calcolo letterale:

* poniamo la dimensione minore = a;
* indichiamo la costante moltiplicativa che ci permette di ottenere la dimensione maggiore dalla minore con x;

foglio An verticale: dimensioni a (minore) e $a \cdot x$ (maggiore)

foglio A(n+1) orizzontale: dimensioni $a \cdot x/2$(minore) e a (maggiore)

Sappiamo che la proprietà utilissima di questi fogli è che viene mantenuta la proporzione delle dimensioni tra il foglio A(n+1) e il foglio An, quindi il rapporto tra le dimensioni è costante (la nostra x):

foglio An $x = a \cdot x / a$ (ovvio), ma anche

foglio A(n+1) $x = a / (a \cdot x /2) = 2a /a \cdot x = 2 / x = \sqrt{2}$ (ogni numero, infatti, si può considerare il prodotto tra due radici quadrate di se stesso es. $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ perché, applicando le proprietà delle radici, diventa $\sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$; quindi $2 / \sqrt{2} = \sqrt{2}$) ... ecco trovato il valore della costante.

E ORA UN PO' DI STORIA

Il foglio A4 è conforme a uno standard internazionale (ISO 216), che a sua volta si basa su uno standard tedesco (DIN 476) creato nel 1922 da Walter Porstmann; questi aveva ripreso un'idea del 1786 del connazionale Georg Christoph Lichtenberg. Tutta la sequenza di formati parte dal foglio A0 verticale, che ha una superficie esatta di 1 metro quadrato; dividendo a metà il foglio con un cambio di orientamento, si ottengono due fogli A1 di 0,5 m^2, da ciascuno di questi due A2 di 0,25 m^2; il formato A3 ha una superficie di 0,125 m^2 ... fino ad arrivare ai fogli A8.

Nei due esercizi svolti poco fa hai trovato più o meno le dimensioni di un foglio A8 e A6 rispettivamente (verifica nell'immagine).

Se osserviamo la suddivisione della superficie, ci accorgiamo che **il numero accanto alla A è l'esponente di una potenza di 2 il cui valore corrisponde al numero di fogli di quel formato contenuti in un A0**; es. $2^4 = 16 \rightarrow$ da un foglio A0 si ottengono 16 fogli in formato A4; $2^8 = 256 \rightarrow$ da un foglio A0 si ottengono 256 fogli in formato A8.

Si può anche notare che **quella potenza è il denominatore di un'unità frazionaria il cui valore corrisponde alla superfice di ciascun foglio in metri quadrati** es. per il foglio A4 → $1/16 = 0{,}0625\ m^2 = 625\ cm^2$; per il foglio A8 → $1/256 = 0{,}003906\ m^2 = 39{,}06\ cm^2$.

Verifica le superfici calcolando l'area dei vari formati con i dati dimensionali dell'immagine (con una piccola approssimazione)

<u>Per i ragazzi di terza</u>

Ragioniamo ora sulle dimensioni dei fogli partendo dal calcolo letterale: se poniamo la dimensione minore = a → la dimensione maggiore è $a \cdot \sqrt{2}$; **l'area della superficie di ogni foglio (rettangolo) è quindi data da $a \cdot a \cdot \sqrt{2}$, cioè $a^2 \cdot \sqrt{2}$** ; applichiamo la formula inversa per trovare la misura delle **dimensioni** del **foglio A0** (trasformando la superficie da metri quadrati a centimetri quadrati): $10000\ cm^2 : \sqrt{2} = 10000\ cm^2 : 1{,}414 = 7072{,}136\ cm^2$; la radice di questo numero dovrebbe poi darci a, cioè la dimensione minore → $\sqrt{7072{,}136\ cm^2}$ = **84,09 cm** (dimensione minore); facendo poi $84{,}09\ cm \cdot \sqrt{2} = 84{,}09\ cm \cdot 1{,}414 =$ **118,9 cm**; queste dimensioni, come prevedibile, sono il quadruplo delle dimensioni di un foglio A4 perché un foglio A0 contiene esattamente 16 fogli A4 (come quelle del foglio A4 sono il quadruplo di quelle del foglio A8 perché un foglio A4 contiene esattamente 16 fogli A8); per il **foglio A4** → $625\ cm^2 : \sqrt{2} = 625\ cm^2 : 1{,}414 = 442{,}0085\ cm^2$ circa ; la radice di questo numero dovrebbe poi darci a, cioè la dimensione minore → $\sqrt{442{,}0085\ cm^2}$ = **21,02 cm**, che corrisponde esattamente alla **dimensione del lato minore** di un foglio A4 (per ottenere l'altra, 29,7 cm, basta moltiplicare questo valore $\cdot \sqrt{2}$); proviamo anche con il **foglio A8**: → $39{,}06\ cm^2 : \sqrt{2} = 39{,}06\ cm^2 : 1{,}414 = 27{,}62\ cm^2$ circa ; la radice di questo numero dovrebbe poi darmi a, cioè la dimensione minore → $\sqrt{27{,}62\ cm^2}$ = **5,25 cm**, che corrisponde esattamente alla **dimensione del lato minore** di un foglio A8 (per ottenere l'altra, 7,425 cm, basta moltiplicare questo valore $\cdot \sqrt{2}$).

ESERCIZI

1) Adesso fate una verifica di questa interessante proprietà con due casi di fogli inventati:

a) La dimensione minore deve essere 5 cm. Trovate il lato maggiore del foglio e immaginate di stampare 2 pagine per foglio…
b) La dimensione maggiore deve essere 14,14 cm. Trovate il lato minore del foglio e immaginate di fare i due tipi di stampa.

2) Verificate anche che due dimensioni casuali, come 8 cm e 6 cm, non andrebbero bene

3) In Nord America le dimensioni standard sono un po' diverse: cercatele.

4) Trovate quanti fogli di formato A6 sono contenuti in un foglio A0

5) Trovate l'area della superficie di un foglio in formato A6

6) Trovate, con il metodo appena illustrato, le dimensioni di un foglio in formato A6 e controllate che corrispondano a quelle dell'immagine

7) Prendete un foglio da fotocopie (A4), ricavate un quadrato di lato 21cm, tracciane la diagonale partendo da un vertice del foglio e con un compasso la cui punta sia su questo vertice e la cui apertura sia pari alla diagonale, tracciate l'arco di circonferenza sul foglio. Dove finisce? Perché?